TITLE:

強減衰項を持つ非線形波動方程式の空間パラメータに関する同定問題(現象からの関数方程式)

AUTHOR(S):

中桐, 信一; 河, 準洪; Vanualailai, Jito

CITATION:

中桐, 信一 ...[et al]. 強減衰項を持つ非線形波動方程式の空間パラメータに関する同定問題(現象からの関数方程式). 数理解析研究所講究録 2007, 1547: 152-160

ISSUE DATE:

2007-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/80792

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1547 巻 2007 年 152-160

強減衰項を持つ非線形波動方程式の空間パラメータに関する同定問題

神戸大学工学部 中桐 信一 (Shin-ichi Nakagiri)

Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Kobe University, JAPAN.

韓国技術教育大学校 河 準洪 (Junhong Ha)

School of Liberal Arts, Korea University of Technology and Education, KOREA.

南太平洋大学 Jito Vanualailai

Department of Mathematics and Computing Science, University of the South Pacific, FIJI.

1 はじめに

本論文では, 強い減衰項を持つ非線形波動方程式に含まれる空間変数パラメータの同定問題を論じる. Ω を R^n の有界集合で, その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は充分滑らかとする. さらに, $Q = (0,T) \times \Omega$ および $\Sigma = (0,T) \times \Gamma$ とおく. 次の強減衰項を持つ非線形波動方程式で記述される初期境界値問題を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \nabla \cdot (a(x)\nabla y + b(x)\nabla \dfrac{\partial y}{\partial t}) = c(x)F(y) + f \quad \text{in } Q, \\ y = 0 \quad \text{on } \Sigma, \\ y(0,x) = y_0(x), \quad \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x) = y_1(x) \ \text{ in } \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, $a(x)$ は拡散係数, $b(x)$ は粘弾性係数, $c(x)$ は非線形特性の増幅係数, $y_0(x)$, $y_1(x)$ は初期条件, $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は非線形反応関数, f は外力項とする. このタイプの強減衰波動方程式は, 量子力学や弾性体の振動論でしばしば現れ, その解の力学的挙動が良く研究されている (Fitzgibbon [3], Hale [10], Temam [14] 等を参照). 問題 (1.1) において, $a(x), b(x), c(x)$ が同定すべき物理パラメータである. ここでの同定問題においては, $q = (a,b,c)$ が未知パラメータ, 初期値 y_0, y_1 と外力 f は既知とする.

この同定問題を解く準備として, 方程式の解としてどのようなクラスの解をとるか, またどのようなコストに対して 同定問題が考えられるべきかというという問題設定を行なう. そのため, 上の非線形波動方程式に対する弱解の存在と一意性, エネルギー不等式, 解の関数パラメータ $q = (a,b,c)$ に関する連続性と Gâteaux 微分可能性の結果を説明する. 本論

文では, 以上の結果をもとにして, 問題 (1.1) に対する同定問題を解決する. 即ち, 適切な観測による２次コストを導入して $q=(a,b,c)$ をパラメータの許容集合上で評価し, 最適パラメータをコスト最小化問題の解として定義し, その存在と必要条件を導く (cf. Ahmed [1], Lions [11], Omatu and Seinfeld [13]). その他のタイプの非線形波動方程式および抽象非線形２階発展方程式の同定問題に関しては、著者達の研究 Ha and Nakagiri [4,5,6,7,8], Ha, Nakagiri and Tanabe [9], Nakagiri and Ha [12] を参照されたい.

2 非線形波動方程式の解の存在と正則性

問題 (1.1) のデータに関して条件

$$y_0 \in H_0^1(\Omega),\quad y_1 \in L^2(\Omega),\quad f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \tag{2.1}$$

をおく. さらにパラメータ a,b,c については, 有界な正値性の仮定

$$a,\ b,\ c \in L^\infty(\Omega),\quad a(x) \ge a_0 > 0,\quad b(x) \ge b_0 > 0,\quad a.e.\ x \in \Omega \tag{2.2}$$

をおく. 方程式の非線形項 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ に対しては, 次の仮定をおく.

$(H1)$ $K_1>0$ が存在して

$$|F(s)-F(r)| \le K_1|s-r|,\qquad \forall s,\ r \in \mathbf{R}. \tag{2.3}$$

$(H1)$ により,

$$\exists K_2>0;\quad |F(s)| \le K_2(1+|s|),\qquad \forall s \in \mathbf{R}. \tag{2.4}$$

問題 (1.1) を発展方程式として取り扱うために, ２つのヒルベルト空間 $L^2(\Omega)$ および $H_0^1(\Omega)$ を導入する. これらの空間の内積とノルムは次のように定義される.

$$(\psi,\phi)=\int_\Omega \psi(x)\phi(x)dx,\quad |\psi|=(\psi,\psi)^{1/2},\quad \forall\phi,\psi \in L^2(\Omega),$$
$$(\!(\psi,\phi)\!)=(\nabla\psi,\nabla\phi)=\sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\psi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)dx,\quad \|\psi\|=(\!(\psi,\psi)\!)^{1/2},\quad \phi,\psi\in H_0^1(\Omega).$$

$H^{-1}(\Omega)$ は, $H_0^1(\Omega)$ の共役空間であり, $H_0^1(\Omega)$ と $H^{-1}(\Omega)$ の間の共役対を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す.

F は $(H1)$ を満たすので, 写像 $F: L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ が

$$F(\psi)(x)=F(\psi(x))\quad a.e.\ x\in\Omega,\quad \forall\psi\in L^2(\Omega) \tag{2.5}$$

により定義され, その有界性

$$|F(\psi)|^2=\int_\Omega |F(\psi(x))|^2dx \le 2K_2^2(|\Omega|+|\psi|^2),\quad \forall\psi\in L^2(\Omega) \tag{2.6}$$

と Lipschitz 連続性

$$|F(\phi)-F(\psi)| \leq K_1|\phi-\psi|, \quad \forall\phi,\ \psi \in L^2(\Omega) \tag{2.7}$$

が従う. (2.6) において, $|\Omega|$ は Ω の面積を表す.

問題 (1.1) の解空間 $W(0,T)$ は, 次により定義される.

$$W(0,T)=\{g|g\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\ g'\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\ g''\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}.$$

そのノルムは,

$$\|g\|_{W(0,T)}=\left(\|g\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}+\|g'\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}+\|g''\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

で与えられる. また $\mathcal{D}'(0,T)$ により, $(0,T)$ 上の超関数の空間を表す. Dautray and Lions [2] に従い, 問題 (1.1) に対する弱解の定義を与える. 即ち, 関数 y が (1.1) の弱解であるとは, $y\in W(0,T)$ であり, y が次の方程式を満たすときをいう.

$$\begin{cases} \langle y''(\cdot),\phi\rangle+(a\nabla y(\cdot)+b\nabla y'(\cdot),\nabla\phi)=(cF(y(\cdot)),\phi)+\langle f(\cdot),\phi\rangle, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\phi\in H_0^1(\Omega)\quad (\mathcal{D}'(0,T)\ \text{の意味で}), \\ y(0)=y_0\in H_0^1(\Omega),\quad y'(0)=y_1\in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Theorem 2.1 F は $(H1)$ を満たし, y_0, y_1, f は条件 (2.1) を満たし, さらに a,b,c は条件 (2.2) を満たしているとする. このとき, (1.1) はただ 1 つの弱解 $y\in W(0,T)$ を持つ. さらに y は次のエネルギー不等式を満たす.

$$\begin{aligned} &|y'(t)|^2+|\nabla y(t)|^2+\int_0^t|\nabla y'(s)|^2ds \\ \leq\ &C(1+\|y_0\|^2+|y_1|^2+\|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}),\quad \forall t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

ここで $C>0$ は $K_1,K_2>0$, a,b,c の L^∞ ノルム および $a_0,b_0>0$ にのみ依存する定数である.

同定問題の解析において, 弱解 y の次の正則性が本質的に用いられる.

$$y\in C([0,T];H_0^1(\Omega)).$$

3 Hölder 連続性と Gâteaux 微分可能性

パラメータ $q=(a,b,c)$ の空間を線形空間にするため, 次の (Modified) 問題を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\nabla\cdot\left((a^2(x)+a_0)\nabla y+(b^2(x)+b_0)\nabla\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)=c(x)F(y)+f \quad \text{in } Q, \\ y=0 \quad \text{on } \Sigma, \\ y(0,x)=y_0(x),\quad \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x)=y_1(x) \quad \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

(3.1) において, $a_0, b_0 > 0$, $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $y_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ は固定されており, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $L^\infty(\Omega)$ が同定すべき未知関数である.

$q = (a,b,c)$ の作るパラメータ空間 $\mathcal{P}$ を

$$\mathcal{P} = L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega)^3 \tag{3.2}$$

により導入する. 空間 $\mathcal{P}$ のノルムは, $\|a\|_\infty = \text{ess sup}_{x\in\Omega}|a(x)|$ として

$$\|q\|_{\mathcal{P}} = \|a\|_\infty + \|b\|_\infty + \|c\|_\infty, \quad \forall q = (a,b,c) \in \mathcal{P}$$

により定義する. このとき Theorem 2.1 により, 次の解写像が定義される.

$$q \in \mathcal{P} \to y(q) \in W(0,T). \tag{3.3}$$

解写像 (3.3) は, Hölder 連続である事が示される.

Theorem 3.1 解写像 $q \in \mathcal{P} \to y(q) \in W(0,T)$ は, 指数 $\frac{1}{2}$ で局所 Hölder 連続である. つまり, $\mathcal{P}$ の任意の有界集合 K に対して定数 $C(K) > 0$ が存在して

$$\|y(q) - y(\bar{q})\|_{W(0,T)}^2 \leq C(K)\|q - \bar{q}\|_{\mathcal{P}}, \quad \forall q, \bar{q} \in K$$

が成りたつ.

さらにこの解写像は, 非線形項 F の微分可能性の下で Gâteaux 微分可能である事も示す事ができる. そのため, 非線形項 F に次の更なる仮定を与える.

($H2$) $F(s)$ は, $\mathbf{R}$ 上で連続的に微分可能であり, 導関数 $F'(s)$ は次の ρ 次の Hölder 連続性と一様有界性をみたす.

$$|F'(s) - F'(r)| \leq K_3|s - r|^\rho, \quad |F'(s)| \leq K_4, \quad \forall s,\ r \in \mathbf{R}. \tag{3.4}$$

ここで, $0 < \rho \leq 1$ および $K_3, K_4 > 0$ は定数とする.

Proposition 3.1 ($H2$) を仮定する. さらに 写像 $F : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ を

$$F(\psi)(x) = F(\psi(x)) \quad a.e.\ x \in \Omega \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \tag{3.5}$$

により定義し, 空間次元 n が

$$n \leq 2 + \frac{2}{\rho} \tag{3.6}$$

を満たすと仮定する. このとき, $F : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ は連続的に Fréchet 微分可能であり, Fréchet 微分 $\partial_y F(y)$ の $y = \psi \in H_0^1(\Omega)$ における値は, 掛け算作用素

$$\partial_y F(\psi)h(x) = F'(\psi(x))h(x) \quad a.e.\ x \in \Omega, \quad \forall h \in H_0^1(\Omega) \tag{3.7}$$

で与えられる. さらに, Fréchet 微分 $\partial_y F(y)$ は $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ 上で y に関してノルム連続になり, 次の評価が成りたつ:

$$\|\partial_y F(\psi + h) - \partial_y F(\psi)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))} \leq C\|h\|^\rho, \quad \forall \psi,\ h \in H_0^1(\Omega). \tag{3.8}$$

$$\|\partial_y F(\psi)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))} \leq C, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.9}$$

(証明の概略) Hölder 不等式と次の埋め込み定理を使って, Fréchet 微分を計算する.

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q < \infty \quad (n = 1, 2); \quad q = 2n/(n-2) \quad (n \geq 3).$$

Proposition 3.1 を用いて, 解写像 $q \in \mathcal{P} \to y(q) \in W(0,T)$ の Gâteaux 微分可能性を示す事ができる.

Theorem 3.2 ($H1$), ($H2$) を仮定し, 空間次元 n が条件 (3.6) を満足すると仮定する. このとき, 解写像 $q \in \mathcal{P} \to y(q) \in W(0,T)$ は,Gâteaux 微分可能であり解 $y(q)$ の $q = q^* = (a^*, b^*, c^*)$ での, 方向 $\overline{q} = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \in \mathcal{P}$ における Gâteaux 微分 $z = Dy(q^*)\overline{q}$ は, 次の変分方程式の弱解になる.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \nabla \cdot \Big((a^{*2}(x) + a_0)\nabla z + (b^{*2}(x) + b_0)\nabla \dfrac{\partial z}{\partial t} \Big) = c^*(x)\partial_y F(y^*) z + \mathcal{F}(\overline{q}) \quad \text{in } Q, \\ z = 0 \quad \text{on } \Sigma, \\ z(0,x) = 0, \quad \dfrac{\partial z}{\partial t}(0,x) = 0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

ここで $y^* = y(q^*)$ であり

$$\mathcal{F}(\overline{q}) = \nabla \cdot \Big(2a^*\overline{a}\nabla y^* + 2b^*\overline{b}\nabla \frac{\partial y^*}{\partial t} \Big) + \overline{c}F(y^*). \tag{3.11}$$

(証明の方針) パラメータ $q^* = (a^*, b^*, c^*)$ と $\overline{q} = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ を固定する. 任意の $\lambda \in [-1, 1]$, $\lambda \neq 0$ に対し,

$$q_\lambda = q^* + \lambda\overline{q} = (a^* + \lambda\overline{a}, b^* + \lambda\overline{b}, c^* + \lambda\overline{c})$$

とおく. また,

$$y_\lambda = y(q_\lambda), \quad y^* = y(q^*), \quad z_\lambda = \frac{y_\lambda - y^*}{\lambda} \quad (\lambda \neq 0)$$

とする. 次の 3 つの Step に分けて, 証明を実行する.

Step 1. (3.10) の弱解 z の存在と一意性を示す.

Step 2. $\{z_\lambda\}$ の $W(0,T)$ における有界性を示す.

Step 3. $z_\lambda - z$ の $W(0,T)$ における 0 への強収束性を示す.

Step 3 において, $\{z_\lambda\}$ の弱極限が (3.10) の弱解 z に強収束することをエネルギー等式と Proposition 3.1 を用いて示す. その際, 非線形項の差 $F(y_\lambda) - F(y^*)$ の処理に Fréchet 微分に関する積分型平均値定理を用いる. 強収束性を示すにかなり面倒な計算が必要になる. 詳しい解析は略す.

解写像 $q \in \mathcal{P} \to y(q) \in W(0,T)$ は, Fréchet 微分可能ではない. しかし, 次の定理を示す事ができる.

Theorem 3.3 定理 3.2 の仮定の下で, 解 $y(q)$ の $q = q^* = (a^*, b^*, c^*)$ での, 方向 $\overline{q} = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \in \mathcal{P}$ における Gâteaux 微分 $z = Dy(q^*)\overline{q}$ は, 次の α 次 Hölder 収束性

$$\frac{\|y(q^* + \overline{q}) - y(q^*) - Dy(q^*)\overline{q}\|_{W(0,T)}}{\|\overline{q}\|_{\mathcal{P}}^{\alpha}} \to 0 \quad \text{as} \quad \|\overline{q}\|_{\mathcal{P}} \to 0 \tag{3.12}$$

を持つ. ここで, α は $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ を満たす任意の指数である.

4 最適パラメータの存在とその必要条件

(3.1) に対する同定問題のコストを, 分布-終端値観測から得られる次の 2 次コストで与える.

$$\begin{aligned} J(q) &= \int_Q |y(q) - z_d|^2 dxdt + \int_\Omega |y(q;T) - z_d^T|^2 dx, \\ &= \int_0^T |y(q;t) - z_d(t)|^2 dt + |y(q;T) - z_d^T|^2, \quad \forall q = (a,b,c) \in \mathcal{P}_{ad}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで, $z_d \in L^2(Q) = L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $z_d^T \in L^2(\Omega)$ は $y(q)$ の理想分布および終端値とする. 許容集合 $\mathcal{P}_{ad}$ を $\mathcal{P} = L^\infty(\Omega)^3$ の閉凸部分集合として, コスト (4.1) に対し次の 2 つの問題を解こう.

(i) $\inf\limits_{q \in \mathcal{P}_{ad}} J(q) = J(q^*)$ となる最適解 $q^* \in \mathcal{P}_{ad}$ の存在を示せ.

(ii) 最適解 q^* が存在するとして, その特徴づけを求めよ.

問題 (i) については, $\mathcal{P}_{ad}$ に次の条件をおく.

$$\mathcal{P}_{ad} \text{ は, } L^\infty(\Omega)^3 \text{ におけるコンパクト集合である.}$$

問題 (ii) については, $q^* = (a^*, b^*, c^*)$ の必要条件を与える. そのためには, コスト $J(q)$ の q^* における Gâteaux 微分可能性と q^* の必要条件

$$DJ(q^*)(q - q^*) \geq 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}_{ad} \tag{4.2}$$

の解析が必要になる. ここで, $DJ(q^*)(q - q^*)$ は $J(q)$ の $q = q^*$ における $q - q^*$ 方向への Gâteaux 微分である. Theorem 3.2 により 解写像 $q \in \mathcal{P} \to y(q) \in W(0,T)$ は, Gâteaux 微分可能となり, 従って $J(q)$ は実際に Gâteaux 微分可能であり, その必要条件 (4.2) は, 変分方程式 (3.10) の解 z で記述可能である.

4.1 最適パラメータの存在

問題 (i) を考える. 連続な埋め込み

$$W(0,T) \hookrightarrow C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{4.3}$$

に注意すると, Theorem 3.1 から次の存在定理が示される.

Theorem 4.1 $\mathcal{P}_{ad} \subset \mathcal{P} = L^\infty(\Omega)^3$ がコンパクトならば, コスト (4.1) に対する少なくとも一つの最適パラメータ $q^* \in \mathcal{P}_{ad}$ が存在する.

(証明) コスト J の最小化列 $\{y(q_n)\}$, $q_n \in \mathcal{P}_{ad}$ をとる. $\mathcal{P}_{ad}$ はコンパクトなので, $q_{nk} \to q^*$ in $\mathcal{P}$ となる部分列 $\{q_{nk}\}$ と $q^* \in \mathcal{P}_{ad}$ がとれる. このとき, Theorem 3.1 により, $y(q_{nk}) \to y(q^*)$ in $W(0,T)$ が言えて,

$$\inf_{q\in\mathcal{P}_{ad}} J(q) = \lim_{n\to\infty} J(q_n) = J(q^*)$$

となり, $q^* = (a^*, b^*, c^*)$ は求める最適パラメータである.

Remark 4.1 $\mathcal{P}_{ad}$ が $p > n$ として $W^{1,p}(\Omega)^3$ の有界閉集合ならば, $\mathcal{P}_{ad}$ は $L^\infty(\Omega)^3$ でコンパクトである.

Remark 4.2 $z_d \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ として, 速度観測から得られる次の２次コスト $J(q)$ に対しても, 最適パラメータ $q^* \in \mathcal{P}_{ad}$ は存在する.

$$J(q) = \|y'(q) - z_d\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

4.2 最適性の必要条件

$\mathcal{P}_{ad}$ を $\mathcal{P}$ の閉凸集合とし, $q^* = (a^*, b^*, c^*)$ を $\mathcal{P}_{ad}$ 上のコスト $J(q)$ の最適パラメータとする. 問題 (ii) を解決するためには, 最適パラメータ q^* の必要条件 (4.2) を適当な随伴系の言葉で書き変える必要がある. コスト (4.1) に対する q^* の最適性の必要条件 (4.2) は, 次のように書き直される.

$$\int_0^T (y(q^*;t) - z_d(t), z(t))dt + (y(q^*;T) - z_d^T, z(T)) \geq 0, \qquad \forall q \in \mathcal{P}_{ad}. \tag{4.4}$$

ここで , $z = Dy(q^*)(q - q^*)$ は, $\overline{q} = q - q^*$ とした時の変分方程式 (3.10) の弱解である.

必要条件 (4.4) を適切に記述するため, 次の随伴系を導入する. 即ち 随伴解 $p = p(q^*)$ は, 次の線形終端値問題の弱解として定義される.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla \cdot ((a^{*2}(x) + a_0)\nabla p + (b^{*2}(x) + b_0)\dfrac{\partial p}{\partial t}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \partial_y F(y^*)'(c^*(x)p) + y^* - z_d \quad \text{in } Q, \\ p = 0 \quad \text{on } \Sigma, \\ p(T,x) = 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial t}(T,x) = -(y^*(T,x) - z_d^T(x)) \quad \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

ここで, $y^* = y(q^*)$ であり, $\partial_y F(y^*)'$ は Fréchet 微分 $\partial_y F(y^*)$ の共役作用素を表す. 条件

$$y^* - z_d \in L^2(Q) = L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad y^*(T) - z_d^T \in L^2(\Omega) \tag{4.6}$$

に注意すると, (4.5) は唯 1 つの弱解 p を持つ事がわかる.

Theorem 4.2 最適パラメータ $q^* = (a^*, b^*, c^*)$ は, 次の 2 つの方程式系および 1 つの変分不等式により特徴づけられる.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y^*}{\partial t^2} - \nabla \cdot \Big((a^{*2}(x) + a_0)\nabla y^* + (b^{*2}(x) + b_0)\dfrac{\partial y^*}{\partial t}\Big) = c^*(x)F(y^*) + f \quad \text{in } Q, \\ y^* = 0 \quad \text{on } \Sigma, \\ y^*(0,x) = y_0(x), \quad \dfrac{\partial y^*}{\partial t}(0,x) = y_1(x) \quad \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p^*}{\partial t^2} - \nabla \cdot \Big((a^{*2}(x) + a_0)\nabla p^* + (b^{*2}(x) + b_0)\dfrac{\partial p^*}{\partial t}\Big) \\ \qquad\qquad = \partial_y F(y^*)'(c^*(x)p) + y^* - z_d \quad \text{in } Q, \\ p^* = 0 \quad \text{on } \Sigma, \\ p^*(T,x) = 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial t}(T,x) = -(y^*(T,x) - z_d^T(x)) \quad \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{4.8}$$

$$2\int_Q \nabla p^* \cdot \Big(a^*(a-a^*)\nabla y^* + b^*(b-b^*)\nabla\frac{\partial y^*}{\partial t}\Big)dxdt - \int_Q p^*(c-c^*)F(y^*)dxdt \le 0, \quad \forall q = (a,b,c) \in \mathcal{P}_{ad}. \tag{4.9}$$

ここで, $y^* = y(q^*)$, $p^* = p(q^*)$ である.

(証明の方針) (4.8) に (3.10) の解 z を掛けて部分積分を実行し, 必要条件 (4.4) を書き直す.

最適必要条件 (4.9) の応用として, 次の Bang-Bang 原理を導く事ができる. 許容集合 $\mathcal{P}_{ad}$ として, 積集合

$$\mathcal{P}_{ad} = \mathcal{P}_{ad}^a \times \mathcal{P}_{ad}^b \times \mathcal{P}_{ad}^c, \quad \mathcal{P}_{ad}^a,\ \mathcal{P}_{ad}^b,\ \mathcal{P}_{ad}^c \subset L^\infty(\Omega) \tag{4.10}$$

を取る. このとき, 必要条件 (4.9) は次の 3 つの条件と同値である.

$$\int_Q \nabla p^* \cdot \Big(a^*(a^*-a)\nabla y^*\Big)dxdt \ge 0, \quad \forall a \in \mathcal{P}_{ad}^a. \tag{4.11}$$

$$\int_Q \nabla p^* \cdot \Big(b^*(b^*-b)\nabla y^{*\prime}\Big)dxdt \ge 0, \quad \forall b \in \mathcal{P}_{ad}^b. \tag{4.12}$$

$$\int_Q (c-c^*)p^*F(y^*)dxdt \ge 0, \quad \forall c \in \mathcal{P}_{ad}^c. \tag{4.13}$$

特に c^* に対する最適条件 (4.13) を考察する. そのため, $\gamma_0, \gamma_1 \in L^\infty(\Omega)$ として

$$\mathcal{P}_{ad}^c = \{c(x) : \gamma_0(x) \le c(x) \le \gamma_1(x) \ \text{ a.e. } x \in \Omega\} \tag{4.14}$$

とおく. (4.13) より Lebesgue の収束定理を用いて, a.e. $t \in [0,T]$ に対し

$$\int_{\Omega}(c(x) - c^*(x))p^*(t,x)F(y^*(t,x))dx \geq 0, \quad \forall c \in \mathcal{P}_{ad}^c \tag{4.15}$$

が成りたつ事がわかる. 上の不等式 (4.15) の成りたつ t を固定する. このとき c^* についての次の Bang-Bang 原理が導かれる. 即ち, a.e. $x \in \Omega$ に対し,

$$\begin{cases} p^*(t,x)F(y^*(t,x)) > 0 \text{ ならば, } c^*(x) = \gamma_0(x), \\ p^*(t,x)F(y^*(t,x)) < 0 \text{ ならば, } c^*(x) = \gamma_1(x) \end{cases} \tag{4.16}$$

が導かれる. a^*, b^* についても (4.11), (4.12) から同様の Bang-Bang 原理が示される.

参考文献

[1] N. U. Ahmed, *Optimization and identification of systems governed by evolution equations on Banach space*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific & Technical, **184** 1988.

[2] R. Dautray and J-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 5, Evolution Problems I*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.

[3] W. E. Fitzgibbon, *Strongly damped quasilinear evolution equations*, J. Math. Anal. Appl. **79** (1981), pp. 536-550.

[4] J-H. Ha and S. Nakagiri, *Identification problems of damped sine-Gordon equations with constant parameters*, J. Korean Math. Soc., **39**(2002), 509-524.

[5] J-H. Ha and S. Nakagiri, *Identification problems of damped sine-Gordon equations with constant parameters*, J. Korean Math. Soc. **39** (2002), pp. 509-524.

[6] J-H. Ha and S. Nakagiri, *Identification problems for the damped Klein-Gorden equations*, J. Math. Anal. Appl. **289** (2004), pp. 77-89.

[7] J-H. Ha and S. Nakagiri, *Identification problems for systems governed by abstract nonlinear damped second order equations*, J. Korean Math. Soc., **41-3**(2004), 435-459.

[8] J-H. Ha and S. Nakagiri, *Identification of constant parameters in perturbed sine-Gordon equations*, J. Korean Math. Soc., **43-5**(2006), 931-950.

[9] J-H. Ha , S. Nakagiri and H. Tanabe, *Gâteaux differentiability of solution mappings for semilinear second-order evolution equations*, J. Math. Anal. Appl., **310**(2005), 518-532.

[10] J. K. Hale, *Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems*, Mathematical Survery and Monographs 25, American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1988.

[11] J. L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[12] S. Nakagiri and J-H. Ha, *Constant parameter identification problems of coupled sine-Gordon equations*, Inverse Problems and Spectral Theory, American Mathematical Society, Contemporary Mathematics. **348** (2004), pp. 77-91.

[13] S. Omatu and J.H. Seinfeld, *Distributed Parameter Systems; Theory and Applications*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1989.

[14] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physis*, Second Edition, Applied Mathematica Sciences. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, Vol. 68, 1997.